Mathematik in der Ökonomie

Alexia Prskawetz und Bernhard Rengs

1. Grundbegriffe

Die Lehre der Ökonomie - im Deutschen als *Volkswirtschaftslehre* bezeichnet - wird in die Teilgebiete der Mikro- und Makroökonomie gegliedert. Während die Mikroökonomie das Verhalten von Individuen und Firmen sowie deren Interaktion auf Märkten untersucht, stehen gesamtwirtschaftliche Größen wie das Wirtschaftswachstum, die Arbeitslosigkeit, Inflation, etc. im Mittelpunkt der Makroökonomie.

Mikroökonomie Konkret beschäftigt sich die Mikroökonomie mit der Allokation knapper Ressourcen auf alternative Verwendungsmöglichkeiten. („*Du kannst nicht immer das bekommen, was Du willst*", Mick Jagger). Beispiele begrenzter Ressourcen sind vielfältig und umfassen das Einkommen, das technische Wissen, die zur Verfügung stehende Zeit, begrenzte Rohstoffe, etc. Untersucht werden z.B. die Verwendung des Einkommens für den Kauf von unterschiedlichen Konsumgütern, die Allokation der insgesamt zur Verfügung stehenden Zeit auf Arbeitszeit und Freizeit und die Aufteilung der finanziellen Ressourcen von Unternehmen zum Ankauf von diversen Produktionsfaktoren, etc.

Den Entscheidungen der optimalen Aufteilung von knappen Ressourcen liegen wiederum entsprechende Theorien zugrunde, wobei die mathematische Darstellung dieser Theorien in Modellen erfolgt, welche letztendlich auch für Prognosezwecke eingesetzt werden können. Die Überprüfung und Verbesserung der Theorien ist ein zentraler Bestandteil der Entwicklung der Volkswirtschaftslehre als Wissenschaft.

So wird in der *Konsumtheorie* auf Grundlage von Präferenzen und Einkommensbeschränkungen der Individuen ein optimales Konsumbündel bestimmt, welches die Konsumentin nachfragen wird. Neben der Konsumentscheidung können jedoch auch Entscheidungen über das Sparverhalten oder die Ausbildung im Rahmen der Konsumtheorie formuliert werden. Um diese intertemporalen Entscheidungen zu modellieren, werden dynamische Modelle der Konsumtheorie angewandt. Eine Erhöhung der Ersparnis bzw. der Ausgaben für Ausbildung in der Gegenwart sind z.B. mit größeren Konsummöglichkeiten in der Zukunft verbunden. Die Individuen vergleichen die aktuellen „Kosten" ihrer Entscheidungen mit den abdiskontierten zukünftigen „Erträgen", wobei der Diskontfaktor von der Geduld eines Individuums abhängt.

Entscheidungen von Firmen werden in der *Theorie der Unternehmung* analysiert. Typische Fragestellungen lauten: „Welche Produkte sollen in welchen Mengen produziert werden? Welche Produktionsfaktoren sollen eingesetzt werden?"

Sowohl KonsumentInnen als auch ProduzentInnen sind mit *Preisen* konfrontiert. In der Mikroökonomie wird beschrieben, wie diese Preise durch die Interaktion zwischen KonsumentInnen und Unternehmen bestimmt werden. Abbildung 1 veranschaulicht diese zirkulären Flüsse einer Marktwirtschaft, welche auf der Wechselwirkung von Nachfrage und Angebot auf Haushalts- und Firmenebene beruhen. Monetäre Flüsse sind durch graue, strichlierte und Güterflüsse durch schwarze, durchgezogene Linien gekennzeichnet. Haushalte stellen Arbeit, Land, Kapital und Wissen zur Verfügung. Auf den Faktormärkten erwerben die Firmen die von den Haushalten angebotenen Produktionsfaktoren. Firmen zahlen für diese Produktionsfaktoren Löhne, Mieten, Zinsen und Gewinne an Haushalte. Auf den Gütermärkten erwerben die Haushalte die von den Firmen produzierten Güter.

Die folgenden Ausführungen basieren im Wesentlichen auf den Darstellungen in Pindyck und Rubinfeld, 2009.

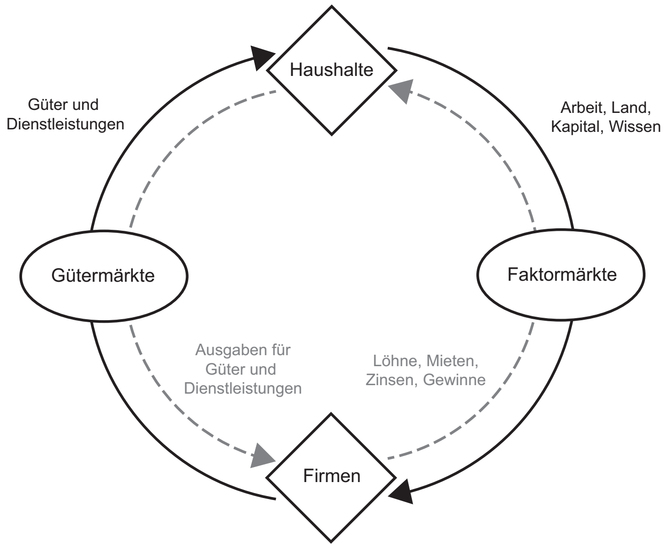

Abb. 1: Zirkuläre Flüsse in der Marktwirtschaft (Parkin et al., 2008, S.49)

Makroökonomie In der Makroökonomie werden die einzelnen Wirtschaftssubjekte zu Sektoren zusammengefasst und gesamtwirtschaftliche Größen wie der private Konsum, die privaten Investitionen, die Staatsausgaben und die Nettoexporte betrachtet. Im Unterschied zur Mikroökonomie betrachtet man keine Einzelpreise, sondern geeignete Preisindizes wie den Verbraucherpreisindex oder den BIP-Deflator. Im Fokus der makroökonomischen Untersuchungen stehen insbesondere die folgenden drei Größen: das Bruttoinlandsprodukt (die gesamtwirtschaftliche Produktion an Finalgütern), die Arbeitslosenquote (der Anteil der Arbeitslosen an den Erwerbspersonen), und die Inflationsrate (Rate, mit welcher das durchschnittliche Preisniveau der in einer Volkswirtschaft konsumierten Güter im Zeitablauf zunimmt).

2. Mikroökonomie

Im Folgenden soll anschaulich - anhand dreier Themenbereiche - die Anwendung mathematischer Modellierungsansätze in der Mikroökonomie demonstriert werden.

2.1. Angebot und Nachfrage

Wir betrachten zunächst das Konzept der Angebots- und Nachfragekurve und zeigen, wie sich aus diesen Kurven die gleichgewichtigen Werte des Preises und der Menge bilden.

Die *Angebotskurve* gibt an, welche Menge eines Gutes die ProduzentInnen zu einem bestimmten Preis zu verkaufen bereit sind. Analog gibt die *Nachfragekurve* die Menge eines Gutes an, die KonsumenInnen bei einem bestimmten Preis zu kaufen bereit sind. Um die Form der Angebots- und Nachfragekurven herzuleiten, benötigen wir das Gesetz des Angebots und der Nachfrage.

Gesetz des Angebots: Eine Erhöhung des Preises führt im Normalfall zu einer Ausweitung des Angebots. In Abbildung 2 weist die Angebotskurve (S) daher einen positiven Anstieg auf.

Gesetz der Nachfrage: Eine Erhöhung des Preises führt im Normalfall zu einem Sinken der Nachfrage. In Abbildung 2 weist die Nachfragekurve (D) daher einen negativen Anstieg auf.

Eine mathematische Formulierung der Nachfrage- und Angebotsfunktion kann durch das folgende lineare Gleichungssystem in den Unbekannten P (Preis) und Q (Menge) dargestellt werden:

$$Q = a - bP \tag{1}$$
$$Q = c + dP. \tag{2}$$

Für die Konstanten gilt: $a > 0 > c$ und $b, d > 0$. Gleichung (1) beschreibt die Nachfragekurve und Gleichung (2) die Angebotskurve. Die Konstante a/b wird auch als Prohibitivpreis bezeichnet, da ab diesem Preis die Nachfrage auf null sinkt. Die Menge $Q = a$ wird als Sättigungsmenge bezeichnet, da auch bei einem Preis von null keine größere Menge nachgefragt wird. Alternativ kann der Preis als Funktion der Menge angeschrieben werden, wodurch man die indirekte Angebots- und Nachfragefunktion erhält:

$$P = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q$$
$$P = -\frac{c}{d} + \frac{1}{d}Q.$$

Die Lösung des Gleichungssystems (1)-(2) ergibt das Marktgleichgewicht (Q^*, P^*), d.h. die Menge und den Preis, für welche Angebot und Nachfrage übereinstimmen. Gleichsetzen von Nachfrage und Angebot:

$$a - bP = c + dP$$

ergibt den gleichgewichtigen Preis

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}.$$

Einsetzen des gleichgewichtigen Preis P^* in die Gleichung (1) oder (2) ergibt den gleichgewichtigen Output:

$$Q^* = \frac{ad+bc}{b+d}.$$

Die *Stabilität des Marktgleichgewichtes* kann anhand folgender Überlegung leicht überprüft werden. Sei

$$E(P) = Q_D(P) - Q_S(P) = a - bP - c - dP$$

die Differenz der nachgefragten Menge Q_D und der angebotenen Menge Q_S. Es kann leicht überprüft werden, dass die Ableitung dieser Differenz nach dem Preis negativ ist, d.h. $dE(P)/dP < 0$. Dies impliziert, dass eine Überschussnachfrage durch eine Erhöhung des Preises bzw. ein Überschussangebot durch ein Sinken des Preises verringert werden (vgl. Abbildung 2).

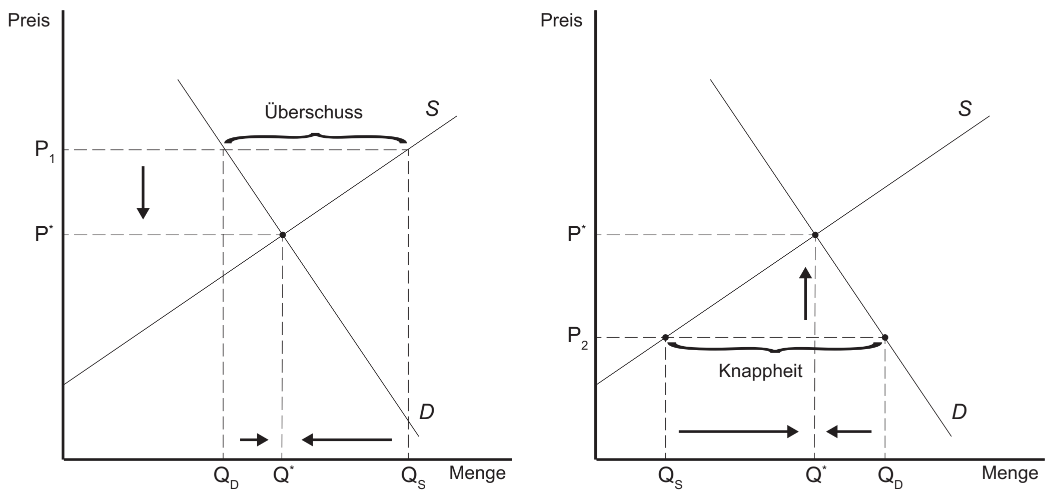

Abb. 2: Stabilität des Marktgleichgewichtes (basierend auf Pindyck und Rubinfeld, 2009)

Als nächstes zeigen wir, dass im Marktgleichgewicht die Konsumenten- und Produzentenrente maximiert wird. Zunächst definieren wir das Konzept der Konsumenten- und Produzentenrente. Hilfreich ist hierbei die Interpretation der Nachfragekurve als jene Kurve, welche angibt, wieviel die Konsumentin bereit ist für eine bestimmte Menge zu zahlen. Analog gibt die Angebotskurve an, für welchen Preis ein Unternehmen bereit ist eine bestimmte Menge anzubieten. In Abbildung 3 wäre die Konsumentin A bereit einen Preis von 10 zu zahlen, obwohl der Marktgleichgewichtspreis nur bei 5 liegt. Die Differenz im Ausmaß von 5 Preiseinheiten wird als Konsumentenrente bezeichnet, da die Konsumentin A weniger zahlen muß als sie entsprechend ihrer Nachfragekuve zu zahlen bereit wäre. Entsprechend der Angebotskurve in Abbildung 3 wäre ein Unternehmen bereit, die von der Konsumentin A nachgefragte Menge zu einem geringeren Preis von $P = 2$ als den Marktgleichgewichtspreis $P = 5$ anzubieten. Die Differenz beider Preise im Ausmaß von 3 Preiseinheiten wird als Produzentenrente bezeichnet. Die Addition der Konsumenten- und Produzentenrente für alle Mengen, welche unterhalb der Gleichgewichtsmenge liegen (die schraffierte Fläche in Abbildung 3), wird als die Konsumenten- und Produzentenrente für den gleichgewichtigen Preis $P = 5$ bezeichnet.

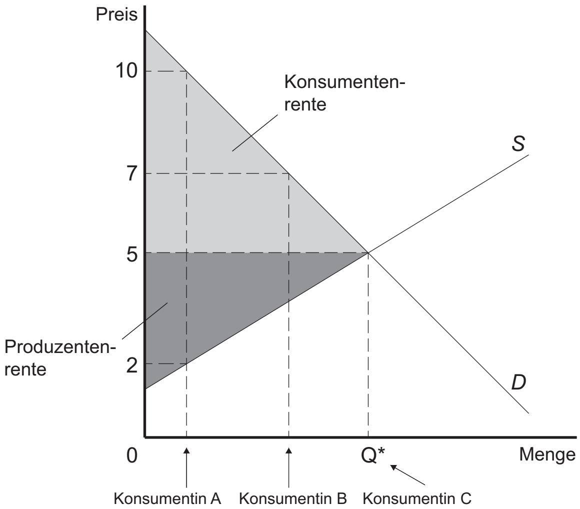

Abb. 3: Konsumenten- und Produzentenrente im Marktgleichgewicht (nach Pindyck und Rubinfeld, 2009)

Für eine gegebene Menge $\tilde{Q}$ können wir die Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente wie folgt anschreiben:

$$\left[\, P_D(\tilde{Q}) - P^* \right] + \left[P^* - P_S(\tilde{Q}) \right] = P_D(\tilde{Q}) - P_S(\tilde{Q})$$

wobei $P_D(.)$ die indirekte Nachfragefunktion, d.h. den Preis als Funktion der Menge, bezeichnet. Analog bezeichnet $P_S(.)$ die indirekte Angebotsfunktion. Die Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente über den Bereich $[0, Q]$ kann durch das folgende Integral angeschrieben werden:

$$\int_0^Q \left[P_D(\tilde{Q}) - P_S(\tilde{Q}) \right] d\tilde{Q}.$$

Ziel ist es nun zu zeigen, dass obiges Integral maximiert wird, wenn $Q = Q^*$ gilt. Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum lautet, dass die Ableitung des obigen Integrals gleich null ist:

$$P_D(Q) - P_S(Q) = 0.$$

Gleichheit von Angebots- und Nachfragepreis wird bei der Menge $Q = Q^*$, welche dem Marktgleichgewicht entspricht, erzielt. Wir haben somit gezeigt, dass die Summe von Konsumenten- und Produzentenrente im Marktgleichgewicht maximiert wird.

2.2. Nutzenmaximierung

Die Analyse des Konsumverhaltens erfordert zunächst die Definition von *Konsumentenpräferenzen*. Diese werden unter einer gegebenen Budgetbeschränkung die optimale Verbraucherentscheidung bestimmen.

Präferenzen entsprechen einem mathematischen Konzept einer **binären Relation** auf der Menge aller Konsumgüterbündel. Unter einem Konsumgüterbündel versteht man einen Vektor von Konsumgütern, z.B. bezeichnet $x = (x_1, x_2)$ ein Konsumgüterbündel mit zwei Gütern. Um die Präferenz der Konsumentin darzustellen, betrachten wir die folgende binäre Relation $x \succsim y$, welche bedeutet, dass $x = (x_1, x_2)$ zumindest so gut wie $y = (y_1, y_2)$ ist.

Um eine konsistent Rangordnung der Güterbündel zu gewährleisten, müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

1. *Vollständigkeit*: Für alle Güterbündel gilt $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ oder $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ oder beides im Fall von Indifferenz.
2. *Reflexität*: Jedes Bündel ist mindestens so gut wie es selbst: $(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$
3. *Transitivität*: aus $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$ folgt $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$.

Indifferenzkurven (vgl. Abbildung 4) sind eine Möglichkeit Präferenzen darzustellen. Die Indifferenzkurve durch das Konsumgüterbündel *A* bzw. *B* oder *D* besteht aus allen Güterbündel, die zu *A* bzw. *B* oder *D* indifferent sind. Im Unterschied dazu, wird der Warenkorb *A* gegenüber dem Warenkorb *B* bevorzugt, welcher wiederum gegenüber dem Warenkorb *D* bevorzugt wird.

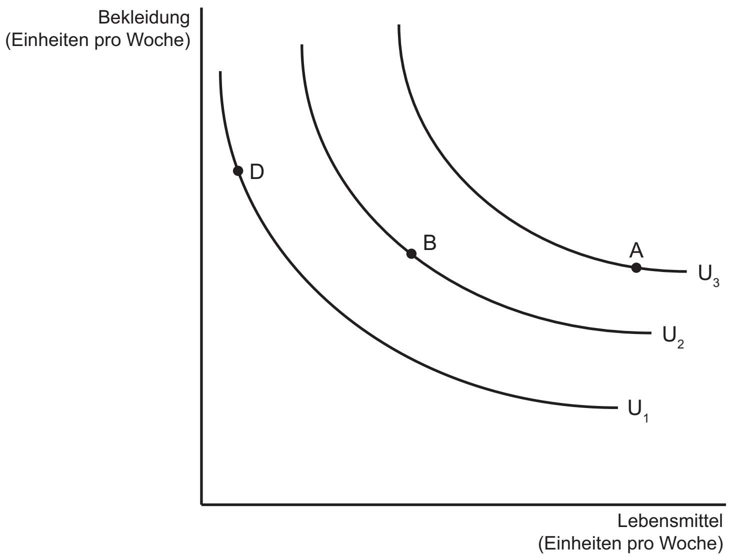

Abb. 4: Darstellung von Indifferenzkurven (nach Pindyck und Rubinfeld, 2009)

Sofern die Präferenzen die oben angeführten Eigenschaften und darüber hinaus eine an dieser Stelle nicht nicht näher beschriebene Stetigkeitseigenschaft erfüllen, können sie durch **Nutzenfunktionen** $u(.)$ repräsentiert werden. Durch eine Nutzenfunktion wird jedem Konsumgüterbündel eine Zahl zugeordnet, wobei bevorzugten Bündeln höhere Zahlen zugewiesen werden. Es gilt:

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$
$$x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y).$$

Ausgehend von einer Nutzenfunktion können die **Indifferenzkurven** gezeichnet werden, wobei $\sim$ die Indifferenzrelation bezeichnet. Abbildung 5 zeigt für den 2-dimensionalen Raum, d.h. für Bündel mit zwei Konsumgütern (x_1, x_2), ein Nutzengebirge und entsprechende Indifferenzkurven, welche als Höhenschichtlinien des Nutzengebirges interpretiert werden können.

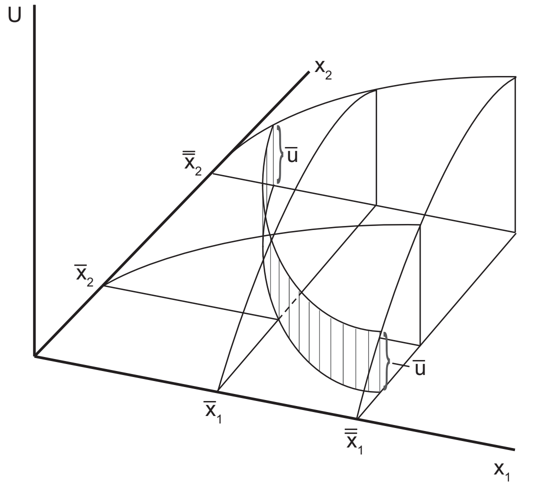

Abb. 5: Nutzengebirge und Indifferenzkurven (nach Schumann, 1987)

Um den optimalen Konsum zu bestimmen, müssen wir noch die Budgetrestriktion formulieren. Wir betrachten wieder den 2-dimensionalen Fall. Seien p_1 und p_2 bzw. x_1 und x_2 die Preise bzw. Mengen der Konsumgüter und y das Nominaleinkommen. Schließt man Sättigung aus und abstrahiert man zunächst von der Möglichkeit des Sparens, so werden die KonsumentInnen stets Konsumgüterkombinationen wählen, welche auf der folgenden Budgetgerade liegen:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y.$$

Abbildung 6 zeigt die Budgetgerade im Konsumgüterraum. Die Achsenabschnitte y/p_1 und y/p_2 werden als das reale Einkommen – ausgedrückt in Einheiten des Gutes 1 bzw. Einheiten des Gutes 2 – bezeichnet. Die Steigung der Budgetgeraden ist durch $-p_1/p_2$ gegeben.

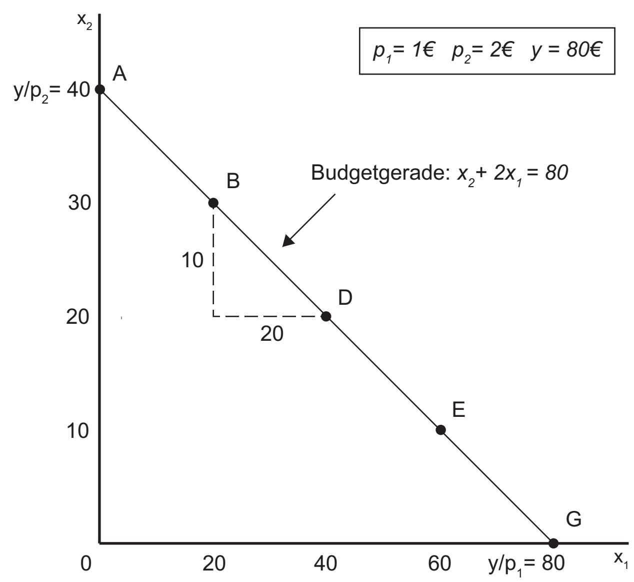

Abb. 6: Budgetgerade (nach Pindyck und Rubinfeld, 2009)

Der Ansatz der Nutzenmaximierung kann nicht nur auf die Analyse der Nachfrage nach Lebensmittel, Kleidung, etc. angewandt werden, sondern auch für die Untersuchung der Nachfrage nach dem Gut „Freizeit“. Wir betrachten nun ein Beispiel einer Nutzenmaximierung, bei welchem die Konsumentin Nutzen aus Konsum und Freizeit generiert und über die optimale Wahl zwischen diesen beiden Gütern zu entscheiden hat. Die Budgetbeschränkung wird in diesem Fall durch zwei Restriktionen beschrieben. Einerseits muss die Summe aus Freizeit L und Arbeitszeit N gleich der zur Verfügung stehenden Zeit T sein, d.h. $L+N=T$. Andererseits ist das Einkommen durch den Lohn W und die Arbeitszeit $T-L$ gegeben und dient zum Ankauf von Konsumgütern deren Preis P beträgt, d.h. $PC=WN$. Formal können wir das Verhalten der Haushalten so abbilden, als ob sie das folgende Nutzenmaximierungsproblem lösen:

$$\begin{aligned} \max_{\{C,L\}} \; & U = U(C,L) \\ s.t. \; & L+N=T \\ & PC = WN. \end{aligned}$$

Durch die Substitution der Nebenbedingungen in die Nutzenfunktion erhält man eine Maximierung in einer Variablen, der Arbeitszeit N, ohne Nebenbedingung:

$$\max_N V(N) := U(\frac{WN}{P}, T-N).$$

Die Bedingung erster Ordnung für die optimale Wahl der auf dem Arbeitsmarkt angebotenen Stunden (=Arbeitsangebot) ist durch

$$\frac{dV}{dN} = U_1(\frac{WN}{P}, T-N)\frac{W}{P} - U_2(\frac{WN}{P}, T-N) = 0 \tag{3}$$

gegeben, wobei U_1 bzw. U_2 die partiellen Ableitungen von U nach C bzw. L beschreiben. Die Konsumentin wählt die von ihr auf dem Markt angebotene Arbeitsleistung N so, dass der Grenznutzen einer zusätzlich angebotenen Einheit an Arbeit – gemessen durch den Grenznutzen einer daraus resultierenden zusätzlichen Konsumeinheit $U_1\frac{W}{P}$ – gleich den Grenzkosten – gemessen durch den marginalen Verlust an Freizeit U_2 – ist.

Für die hinreichenden Bedingungen muss noch die Bedingung

$$\frac{d^2V}{dN^2} = U_{11}\left(\frac{W}{P}\right)^2 - 2U_{12}\frac{W}{P} + U_{22} < 0 \tag{4}$$

erfüllt sein. Man kann zeigen, dass diese Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn die in der (C,L)-Ebene eingezeichneten Indifferenzkurven strikt konvex sind.

Sofern die Bedingung zweiter Ordnung für ein Nutzenmaximum (4) erfüllt ist, ist durch die Bedingung erster Ordnung (3) in impliziter Form die Arbeitsangebotsfunktion

$$N = N(\frac{W}{P}, T)$$

definiert, welche die Abhängigkeit der auf dem Arbeitsmarkt angebotenen Arbeitsleistungen vom Reallohn $\frac{W}{P}$ und der insgesamt zur Verfügung stehenden Zeit T beschreibt.

2.3. Profitmaximierung

Ein weiteres einfaches Beispiel der Maximierung bietet die Profitmaximierung. Wir nehmen im Folgenden an, dass Firmen in einem vollständigen Wettbewerbsmarkt agieren. Diese Marktform ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: a) sehr viele Anbieter und sehr viele Nachfrager, b) Produkte, welche in allen Belangen homogen sind, c) vollständige Markttransparenz. Auf einem vollständigen Konkurrenzmarkt betrachten sowohl die Anbieter als auch die Nachfrager die Preise als gegebene Größen, weil sie diese mit den eigenen Entscheidungen nicht beeinflussen können.

Eine Firma maximiert ihren Profit (Gewinn) π, welcher sich als Differenz des Erlöses (Umsatzes) und der Kosten ergibt.

$$\pi = pq - C(q) = R(q) - C(q).$$

Der Erlös $R(q)$ ist durch das Produkt des exogenen Preises p und der zu optimierende Menge q gegeben. Für die Kostenfunktion nehmen wir eine Funktion $C(q)$ an, welche in der Outputmenge steigt und zunächst fallende und dann wachsende Grenzkosten $C'(q)$ aufweist. D.h. anfänglich wird $C'' < 0$ gelten und danach $C'' > 0$ (vgl. Abbildung 7). Aus der Bedingung erster Ordnung folgt, dass die Firma im Optimum die Produktionsmenge so wählt, dass die daraus resultierenden Grenzkosten mit dem gegebenen Preis übereinstimmen: $p = C'(q)$. Die Bedingung 2.ter Ordnung für ein Profitmaximum ist durch $-C''(q) < 0$ bzw. $C''(q) > 0$ gegeben. Das Profitmaximum kann daher nur auf dem aufsteigenden Ast der Grenzkostenfunktion liegen.

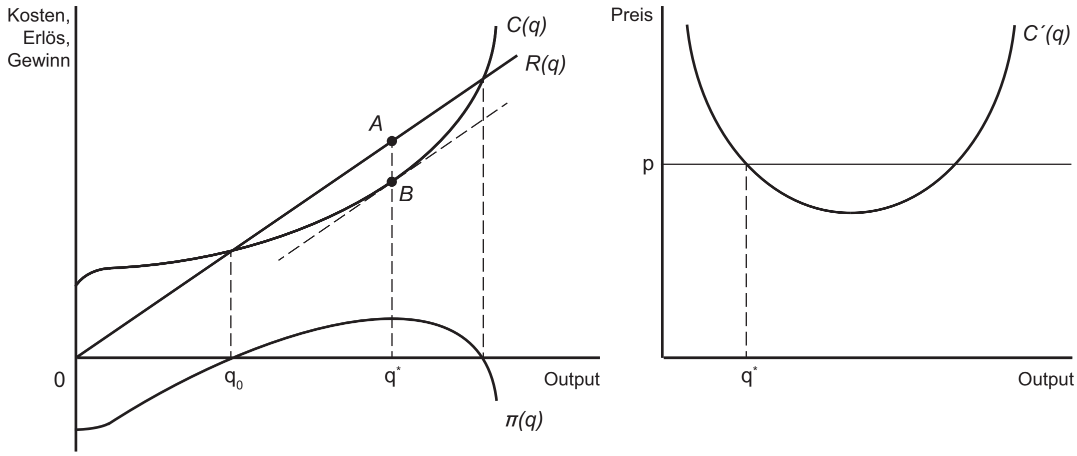

Abb. 7: Profitmaximierung (nach Pindyck und Rubinfeld, 2009)

3. Makroökonomie

Wirtschaftswachstum

Abschließend betrachten wir eines der einfachsten Modelle in der Ökonomie, welches Wirtschaftswachstum zu modellieren versucht, das Modell von Solow und Swan (vgl. Barro und Sala i Martin, 1995, S.14ff). Dieses Modell zeigt anschaulich das Verhalten dynamischer Systeme und illustriert, wie das langfristige mathematische Gleichgewicht und dessen Stabilität analysiert werden können.

Ausgehend von einer Produktionsfunktion $Y(t) = Y(K(t), N(t))$ in den Variablen Kapital $K(t)$ und Arbeitskraft $N(t)$, wird die Dynamik des pro-Kopf Kapitals $k(t) = K(t)/N(t)$ analysiert, wobei t den Zeitindex bezeichnet. In einer geschlossenen Volkswirtschaft stimmen die Bruttoinvestitionen $I(t)$ mit der gesamtwirtschafltichen Ersparnis überein. Wir betrachten der Einfachheit halber den Fall, in dem die Ersparnis des öffentlichen Sektors stets gleich null ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt $I(t) = S(t)$, wobei $S(t)$ die Ersparnis des privaten Sektors beschreibt.

Im Solow-Swan Modell wird nun angenommen, daß jede Periode ein konstanter Anteil s des Outputs gespart wird: $I(t) = S(t) = sY(t)$. Weiters nehmen wir eine Abschreibungsrate des Kapitals von δ an. Zu jedem Zeitpunkt kann der Output $Y(t)$ entweder für den Konsum $C(t)$ oder die Bruttoinvestitionen $I(t)$ verwendet werden.

Die Dynamik des aggregierten Kapitalstocks $K(t)$ kann durch folgende Differenzengleichung dargstellt werden:

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + sY(t).$$

Im folgenden leiten wir die Dynamik des pro-Kopf Kapitals $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ her. Wir nehmen an, dass (a) die Bevölkerung konstant ist und (b) die Outputfunktion konstante Skalenerträge aufweist, d.h. für jedes beliebige $\lambda > 0$ gilt: $\lambda Y(K(t), L(t)) = Y(\lambda K(t), \lambda L(t))$. Setzen wir $\lambda = \frac{1}{L(t)}$ so ergibt sich die pro-Kopf Outputfunktion $\frac{Y(t)}{L(t)} = Y(K(t)/L(t), 1) \equiv y(k(t))$.

$$\begin{aligned} \frac{K(t+1)}{N(t+1)} = \frac{K(t+1)}{N(t)} &= (1-\delta)\frac{K(t)}{N(t)} + s\frac{Y(t)}{N(t)} \\ k(t+1) &= (1-\delta)k(t) + sy(t) \\ k(t+1) &= (1-\delta)k(t) + sy(k(t)) \end{aligned} \tag{5}$$

Gleichung (5) stellt eine nichtlineare Differenzengleichung für den pro-Kopf Kapitalstock dar.

Die Dynamik der pro-Kopf Kapitalvariable ist in Abbildung 7 dargestellt, wobei $y' > 0, y'' < 0$ gilt. Man erkennt, dass das System für $k = k^*$ eine Ruhelage erreicht. Dieses langfristige Gleichgewicht ist auch stabil, da eine Abweichung von diesem eine Konvergenz zurück zu k^* impliziert. Die Dynamik und Stabilität des langfristigen pro-Kopf Kapitalstocks wird durch die Eigenschaften der Produktionsfunktion bestimmt.

Wie kann dieses Modell nun zur Erklärung von Wirtschaftswachstum herangezogen werden? Wir haben gezeigt, daß unser System gegen einen langfristigen gleichgewichten pro-Kopf Kapitalstock k^* konvergiert und somit auch der pro-Kopf Output langfristig stagniert. Um Wachstum zu erzeugen, haben Solow und Swan exogenen technologischen Fortschritt angenommen.

In den letzten Jahren hat die Wachstumstheorie einen großen Aufschwung erlebt. Insbesondere werden in Modellen der endogenen Wachstumstheorie die treibenden Motoren des Wirtschaftswachstum wie Technologie, Innovation, Fortschritt, etc. endogen modelliert. Grundlegend ist dabei die Annahme von mikrofundierten Makromodellen. D.h. sowohl das Sparverhalten der Haushalte als auch die Ausgaben der Firmen für Forschung und Entwicklung werden explizit aus einem mikroökonomischen Entscheidungskalkül abgeleitet. (vgl. Barro und Sala i Martin Barro und Sala i Martin, 1995).

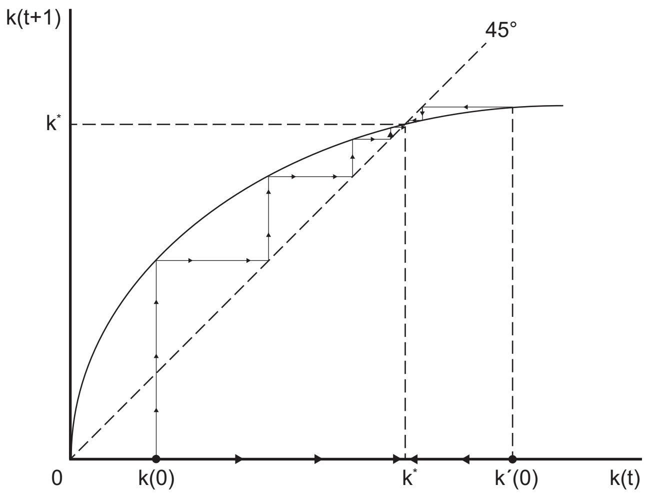

Abb. 8: Dynamik des pro-Kopf Kapitalstock (nach Acemoglu, 2009, S.47)

Danksagung: Unser Dank gilt unserem Kollegen F. X. Hof für die Durchsicht und Korrektur des Manuskripts.

Literatur

Acemoglu, D. (2009) Introduction to Modern Economic Growth, Princeton University Press, Princeton.
Parkin, M., Powell, M. und K. Matthews (2008) Economics, 7th edition, Addison Wesley.
Pindyck, R. und D. Rubinfeld (2009), Mikroökonomie, 7., aktualisierte Auflage, Pearson Studium.
Barro, R.J. und X. Sala-I-Martin (1995) Economic Growth, McGraw-Hill
Schumann, J. (1987) Grundzüge der mikroökonomischen Theorie, Springer Verlag, Berlin.

Anschriften

Alexia Prskawetz
Institut für Wirtschaftsmathematik
(Forschungsgruppe Ökonomie)
Technische Universität Wien
Wittgenstein Centre (IIASA, VID/ÖAW/WU)
Vienna Institute of Demography, Austrian
Academy of Sciences
afp@econ.tuwien.ac.at)

Bernhard Rengs
Institut für Wirtschaftsmathematik
(Forschungsgruppe Ökonomie)
Technische Universität Wien
bernhard.rengs@econ.tuwien.ac.at